Analytische Geometrie Aufgabe 351

a) Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks mit A = (3|1|1), B = (1|2|1) und C = (1|1|3).
b) Ermitteln Sie eine Normalengleichung der Ebene E durch A, B und C.
c) Ermitteln Sie eine Gleichung für die Gerade g, die auf E senkrecht steht und durch den Punkt D = (0|-2|0) geht.
d) Berechnen Sie den Schnittpunkt F von g mit E und die Länge von DF.

a)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}, |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ --> Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{5} * \sqrt{8}} = \left|\frac{4}{\sqrt{5} * \sqrt{8}}\right| = 0{,}6325 -> \boldsymbol{\alpha = 50{,}77° = \gamma}$$

$$\cos\beta = \frac{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{5} * \sqrt{5}} = \left|\frac{-1}{\sqrt{5} * \sqrt{5}}\right| = 0{,}2 -> \boldsymbol{\beta = 78{,}46°}$$

b)

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 * 2 - 0 * 0\\0 * (-2) - (-2) * 2\\(-2) * 0 - 1 * (-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E: (\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}) * \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} = 0}$$

c)

g hat den Richtungsvektor $\vec{n}$.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d)

g x E:

3 - 2r - 2s = 2t (1)
1 + r = -2 + 4t (2)
1 + 2s = 2t (3)

(1) + (3)

4 - 2r = 4t |+2r - 4t

2r = 4 - 4t |:2

r = 2 - 2t (4)

(4) eingesetzt in (2):

1 + 2 - 2t = - 2 + 4t |+2t + 2

6t = 5 |:6

$$t = \frac{5}{6}$$

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{6} * \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{10}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}, |\overrightarrow{FD}| = \frac{1}{3} * \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2 + (-5)^2}$$

$$\overrightarrow{FD} = \frac{1}{3} * \sqrt{150} = 4,08 \text{ LE}$$